

7. cvičení - řešení

Příklad 1 (a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\log\left(1 - \frac{2}{x}\right) \cdot x} \stackrel{\text{VOLSF (S)}}{=} e^{-2}$$

Kde poslednslední rovnost získáme úpravou vnitřní funkce a použitím VOLSF (S):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 - \frac{2}{x}\right) \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} -2 \cdot \frac{\log \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\frac{-2}{x}} \stackrel{\text{VOLSF (P)} + \text{VOAL} + \text{známá lim.}}{=} -2$$

V poslední rovnosti bereme VOLSF $g(x) = \frac{-2}{x}$ a $f(y) = \frac{\log(1+y)}{y}$. Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 1 (b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-x}{(1-x) \cdot (1+\sqrt{x})}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \log\left(\frac{1+x}{2+x}\right)}$$

Dále:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \log\left(\frac{1+x}{2+x}\right) \stackrel{\text{spoj.}}{=} \frac{1}{1+1} \cdot \log\left(\frac{1+1}{2+1}\right) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{2}{3}\right)$$

Dále:

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \log\left(\frac{1+x}{2+x}\right)} \stackrel{\text{VOLSF (S)}}{=} \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2} \log\left(\frac{2}{3}\right)} e^y = e^{\frac{1}{2} \log\left(\frac{2}{3}\right)} = e^{\log\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Příklad 1 (c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\log\left(\frac{1+x}{2+x}\right) \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} e^0 = 1$$

Kde VOLSF (S) použijeme na vnitřní funkci exponentu následovně:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(\frac{1+x}{2+x}\right) \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(\frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{2}{x} + 1}\right) \cdot \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x} - 1} \stackrel{\text{spoj.} + \text{AL}}{=} \log 1 \cdot 0 = 0.$$

Příklad 1 (d)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\log\left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1}\right) \cdot \frac{x^3}{1-x}} \stackrel{\text{VOLSF (P)}}{=} \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$$

Kde VOLSF použijeme na vnitřní funkci exponentu následovně:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1}\right) \cdot \frac{x^3}{1-x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(\frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) \cdot \frac{x^2}{\frac{1}{x} - 1} \stackrel{\text{VoAL}}{=} -\infty \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(\frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) = \\ &= \left| f(y) = \log y, g(x) = \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right| \stackrel{\text{VOLSF (S)}}{=} -\infty \cdot \lim_{y \rightarrow \frac{3}{2}} \log y \stackrel{\text{spoj.}}{=} -\infty \cdot \log \frac{3}{2} = -\infty \end{aligned}$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 1 (e)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\tan \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} e^{[\log \tan(\frac{\pi}{8} + x)] \cdot \tan 2x} \stackrel{\text{spoj.}}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} [\log \tan(\frac{\pi}{8} + x)] \cdot \tan 2x}$$

Použili jsme vzorec $a^y = e^{y \log(a)}$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\log \tan \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right] \cdot \tan 2x \stackrel{\text{VoAL} + \text{spoj.}}{=} \log \tan \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x$$

Výraz $\log \tan \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right)$ je reálné číslo. Dále platí:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4} -} \tan 2x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4} +} \tan 2x = -\infty.$$

Využitím předchozích rovností dostáváme následující.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4} -} \left[\tan \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\tan 2x} = e^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4} +} \left[\tan \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\tan 2x} = e^{-\infty} = 0$$

Jednostranné limity nevyšly stejně, tedy limita ze zadání neexistuje.

Příklad 1 (f)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\log x + 1}{\log x} \right)^{\log x}$$

Použijeme substituci $y = \log x$:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y + 1}{y} \right)^y = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \stackrel{\text{odvozená limita}}{=} e.$$

Tedy i

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\log x + 1}{\log x} \right)^{\log x} = e.$$

Příklad 1 (g)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\log(1+x^2) \cdot \frac{1}{\sin^2 x}} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} e^1 = e$$

Kde VOLSF (S) použijeme na vnitřní funkci exponentu následovně:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \log(1 + x^2) \cdot \frac{1}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \log \left[(1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}} \right] \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} = \\ &\stackrel{\text{VoAL}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \log \left[(1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}} \right] \right) \cdot 1 \stackrel{2 \text{ VOLSF} + \text{odvozená limita}}{=} 1 \end{aligned}$$

Zde použijeme VOLSF (S) na $f(y) = \log(y)$ a $g(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}}$, neboť víme, že $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = e$. Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 1 (h)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\log(1+\tan x) \cdot \frac{1}{\sin x}} \stackrel{\text{VOLSF (S)}}{=} e^1 = e$$

Kde VOLSF (S) použijeme na vnitřní funkci exponentu následovně:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(1 + \tan x) \cdot \frac{1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \tan x)}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos x} =$$

$$\text{AL+VOLSF (P)+ ZL +spoj.} \quad \underline{\underline{1 \cdot 1 = 1}}$$

Zde použijeme VOLSF (P) na $f(y) = \frac{1+\log(y)}{y}$ a $g(x) = \tan x$, neboť víme, že $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 1 (i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\frac{1}{\sin x}}}{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}} = \frac{e}{e} = 1$$

Kde limita čitatele plyne z předchozího příkladu a limitu jmenovatele spočteme pomocí substituce $y = \sin x$ a odvozené limity:

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 2 (a) Necht' $n \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^n} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1-x)}{x^n \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^n \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^{n-1} \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-1}}$$

Dále platí $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \stackrel{\text{VoAL} + \text{spoj.}}{=} \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = 1$.

Je-li $n-1 = 0$, čili $n = 1$, pak $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1$.

Je-li $n-1 > 0$ a sudé, čili $n > 1$ a liché, pak zlomek $\frac{1}{x^{n-1}}$ je kladný nezávisle na kladnosti x . Proto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-1}} = \infty$ (neb $\frac{1}{+0} = \infty$).

Je-li $n-1 > 0$ a liché, čili $n > 1$ a sudé, pak zlomek $\frac{1}{x^{n-1}}$ je kladný pro kladná x a záporný pro záporná x . Platí tedy $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x^{n-1}} = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^{n-1}} = \infty$. Tedy zadaná limita nekonverguje.

Je-li $n-1 < 0$, čili $n < 1$, pak $\frac{1}{x^{n-1}} = x^{1-n}$, kde $1-n > 0$. Proto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$.

Závěr:

$n \in \mathbb{Z}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^n}$
> 1 , liché	∞
> 1 , sudé	$\nexists$
1	1
< 1	0

Příklad 2 (b)

Necht' $n \in \mathbb{Z}$.

Použijeme vzorec $A^n - B^n$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2+7} - \sqrt[3]{x^3+7}}{(x-1)^n} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2+7} - \sqrt[3]{x^3+7}}{(x-1)^n} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x^2+7})^2 + \sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x^3+7} + (\sqrt[3]{x^3+7})^2}{(\sqrt[3]{x^2+7})^2 + \sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x^3+7} + (\sqrt[3]{x^3+7})^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+7 - (x^3+7)}{(x-1)^n \left((\sqrt[3]{x^2+7})^2 + \sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x^3+7} + (\sqrt[3]{x^3+7})^2 \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2(x-1)}{(x-1)^n \cdot x^2 \left(\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} \right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{7}{x^3}} \right)^2 \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^{n-1} \left(\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} \right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{7}{x^3}} \right)^2 \right)} = \\
&\stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} \right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{7}{x^3}} \right)^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^{n-1}}
\end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} \right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{7}{x^3}} \right)^2} = \\
&\stackrel{\text{VoAL} \pm \text{spoj.}}{=} \frac{-1}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{1} + \frac{7}{1^3}} \right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{1} + \frac{7}{1^3}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{1^3}} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{7}{1^3}} \right)^2}} = \frac{-1}{12}.
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^{n-1}} \stackrel{\text{VOLSf (P)}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^{n-1}}$$

V závislosti na kladnosti a sudosti čísla $n - 1$ limita $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^{n-1}}$ nekonečně, či konverguje k nekonečnu, nebo k 0, nebo k 1.

Závěr:

$n \in \mathbb{Z}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2+7} - \sqrt[3]{x^3+7}}{(x-1)^n}$
> 1 , liché	$-\infty$
> 1 , sudé	$\nexists$
1	$\frac{-1}{12}$
< 1	0

Příklad 2 (c) Necht' $a \in \mathbb{R}$.

Použijeme vzorec z přednášky: $\sin x - \sin a = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)$. Pak platí následující.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} &\stackrel{\text{vzorec}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} = \\
&\stackrel{\text{spoj.} \pm \text{ZL}}{=} \cos\left(\frac{a+a}{2}\right) \cdot 1 = \cos a
\end{aligned}$$

Výpočet platí pro libovolné $a \in \mathbb{R}$.

Příklad 2 (d)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Provedme nejdříve úpravu: $\sin(mx) = \sin(mx - m\pi + m\pi) = \sin(m(x - \pi) + m\pi) \stackrel{\text{součtový vzorec}}{=} \sin(m(x - \pi)) \cos(m\pi) + \cos(m(x - \pi)) \sin(m\pi)$. Přičemž $\cos(m\pi) = (-1)^m$ a $\sin(m\pi) = 0$, neb $m \in \mathbb{N}$. Proto platí $\sin(mx) = (-1)^m \sin(m(x - \pi))$ a analogicky $\sin(nx) = (-1)^n \sin(n(x - \pi))$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} &\stackrel{\text{úprava}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(-1)^m \sin(m(x - \pi))}{(-1)^n \sin(n(x - \pi))} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{(-1)^m}{(-1)^n} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(m(x - \pi))}{m(x - \pi)} \frac{m(x - \pi)}{n(x - \pi)} \frac{n(x - \pi)}{\sin(n(x - \pi))} = \\ &\stackrel{\text{VoAL} + \text{VOLSF (P)} + \text{ZL}}{=} (-1)^{m-n} \cdot 1 \cdot \frac{m}{n} \cdot 1 = (-1)^{m-n} \frac{m}{n} \end{aligned}$$

Příklad 2 (e)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Je-li $a = 1$, pak $\frac{a^x - 1}{x - a} = \frac{0}{x - a}$, a proto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = 0$.

Pro $a \neq 1$ uijeme vzorec $y = e^{\log(y)}$ pro $y > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log(a)} - 1}{x \log(a)} \cdot \log(a) \stackrel{\text{VoAL} + \text{VOLSF (P)}}{=} \log(a) \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \stackrel{\text{ZL}}{=} \log(a) \cdot 1 = \log(a)$$

Příklad 2 (f) Nechť $a \in \mathbb{R}$.

Je-li $a = 0$, pak $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1$.

Pro $a \neq 0$ použijeme vzorec $a = e^{\log(a)}$ pro $a > 0$. Je proto třeba nejdříve ověřit, že $\frac{x+a}{x-a} > 0$. Je-li $a > 0$, pak kžžená nerovnost nastane v případě, že $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$. To je splněno pro dostatečně velká x a jelikož $x \rightarrow \infty$, můžeme předpokládat, že $\frac{x+a}{x-a} > 0$. Podobně pro $a < 0$ dostáváme, že stačí, aby $x > -a$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x \stackrel{\text{vzorec}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}$$

Spočítejme nyní $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(\frac{x+a}{x-a}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(1 + \frac{2a}{x-a}\right) \cdot \frac{\frac{2a}{x-a}}{\frac{2a}{x-a}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{x-a} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)}{\frac{2a}{x-a}} = \\ &\stackrel{\text{VOLSF (P)}}{=} 2a \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} \stackrel{\text{ZL}}{=} 2a \cdot 1 = 2a \end{aligned}$$

Mohli jsme použít VOLSF, neb $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2a}{x-a} = 0$.

Pltí tedy následující.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x \stackrel{\text{vzorec}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)} \stackrel{\text{VOLSF (S)}}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)} = e^{2a}$$

Příklad 3 (a) Ukážeme, že limita neexistuje. K tomu uvážíme posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ definované předpisem $x_n = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ a $y_n = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $x_n \rightarrow 0$ a $y_n \rightarrow 0$. Dále spočítáme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{x_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin(2n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{y_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Z Heineho věty nyní vyvodíme, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{x} \right)$ neexistuje, protože jsme našli dvě posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ konvergující k nule takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{x_n} \right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{y_n} \right)$.

Příklad 3 (b) Použijeme Heineho větu na posloupnost $x_n = n \rightarrow \infty$. Počítejme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x + \cos \frac{3}{x}}}{\sqrt[6]{x^2 + \sin \frac{2}{x}} - \sqrt[3]{x}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1 - x - \cos \left(\frac{3}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + \sin \left(\frac{2}{x} \right)} - x} \cdot \frac{(x^2 + \sin \left(\frac{2}{x} \right))^{\frac{2}{6}} + (x^2 + \sin \left(\frac{2}{x} \right))^{\frac{1}{6}} x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}} (x + \cos \left(\frac{3}{x} \right))^{\frac{1}{3}} + (x + \cos \left(\frac{3}{x} \right))^{\frac{2}{3}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \left(\frac{3}{x} \right)}{x^2 + \sin \left(\frac{2}{x} \right) - x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \sin \left(\frac{2}{x} \right)} + x}{1} \cdot \frac{x^{\frac{4}{6}} \left(\left(1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{x^2} \right)^{\frac{2}{6}} + \left(1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{x^2} \right)^{\frac{1}{6}} + 1 \right)}{x^{\frac{2}{3}} \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{\cos \left(\frac{3}{x} \right)}{x} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 + \frac{\cos \left(\frac{3}{x} \right)}{x} \right)^{\frac{2}{3}} \right)} = \\ &\stackrel{\text{AL+VoLSF(P)}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \left(\frac{3}{x} \right)}{\sin \left(\frac{2}{x} \right)} \cdot \frac{x \left(\sqrt{1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{x^2}} + 1 \right)}{1} \cdot \frac{3}{3} = \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \left(\frac{3}{x} \right)}{\left(\frac{3}{x} \right)^2} \cdot \left(\frac{3}{x} \right)^2 \cdot \frac{\frac{2}{x}}{\sin \left(\frac{2}{x} \right)} \cdot \frac{x}{2} \cdot x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{x^2}} + 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \left(\frac{3}{x} \right)}{\left(\frac{3}{x} \right)^2} \cdot 9 \cdot \frac{\frac{2}{x}}{\sin \left(\frac{2}{x} \right)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{x^2}} + 1 \right) = \\ &\stackrel{\text{AL+VoLSF(P)} + \text{spoj.}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - \cos y}{y^2} \right) \cdot 9 \cdot \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{y}{\sin y} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \stackrel{\text{ZL}}{=} \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 1 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Přičemž limitu výrazu $1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{x^2}$ jsme počítali následujícím způsobem.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{\frac{2}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} = \\ &\stackrel{\text{VoAL} + \text{VOLS F(P)}}{=} 1 + \lim_{y \rightarrow y} \frac{\sin(y)}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} = 1 + 1 \cdot 0 = 1 \end{aligned}$$

Z Heineho věty je tedy i původní limita pro n rovna $\frac{9}{2}$.

Příklad 3 (c) Ukážeme, že limita neexistuje. Uvažme posloupnosti $x_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ a $y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Pak x_n konverguje k $\frac{\pi}{2}$ zleva a y_n konverguje k $\frac{\pi}{2}$ zprava. Vypočteme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \right) = \infty$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) = -\infty.$$

Z Heineho věty tudíž dostáváme, že $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$ neexistuje.

Příklad 3 (d) Ukážeme, že limita neexistuje. Uvažujme posloupnosti $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}, n \in \mathbb{N}$ a $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{4} + n\pi}, n \in \mathbb{N}$. Pak x_n a y_n obě konvergují k 0. Spočítáme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cotan\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cotan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cotan\left(\frac{1}{y_n}\right) = \cotan\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Z Heineho věty dostáváme, že $\lim_{x \rightarrow 0} \cotan(\frac{1}{x})$ neexistuje.

Příklad 3 (e) Použijeme Heineho větu pro $x_n = n \rightarrow \infty$. Počítáme tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}\right)}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Nejdříve upravíme

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}\right)}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}\right)}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}\right)}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

Počítáme tedy dvě limity. Spočítejme nejdříve limitu vnitřní funkce první limity:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} = 0.$$

Označme $g(x) = \sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}$ a $f(y) = \frac{\arcsin y}{y}$. Již jsme spočetli $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Snadno ověříme, že pro $x \in (1, \infty)$ je $g(x)$ definována a kladná (speciálně $g(x) \neq 0$), a tedy můžeme použít VoLSF(P). Dostáváme, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}\right)}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin y}{y}.$$

Položme nyní $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ a $g(y) = \arcsin y$. Pak $\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = 0$ a g je prostá. Z VoLSF(P) tudíž dostáváme, že

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin y}{y} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}} \stackrel{\text{ZL}}{=} 1.$$

Dále spočítáme druhou limitu:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sin^2 x - x^2 + \cos^2 x}{x^2 + 1 - x^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} = \\
&\stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{\cos^2 x}{x^2}} \right)} \stackrel{\text{AL+VoLSF (P)}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1+1}{1+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Příklad 3 (f) Položme $f(y) = \sqrt{\tan^2 y + 1}(\frac{\pi}{2} - y)$ a $g(x) = \arctan x$. Pak $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$ a zároveň $g(x) \neq \frac{\pi}{2}$ na $(1, \infty)$. Je splněna podmínka (P) VoLSF. Dostáváme

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sqrt{\tan^2 y + 1} \left(\frac{\pi}{2} - y \right) = \\
&= \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sqrt{(\tan^2 y + 1) \left(\frac{\pi}{2} - y \right)^2}
\end{aligned}$$

Nyní se podíváme na limitu vnitřní funkce. Počítejme

$$\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan^2 y + 1) \left(\frac{\pi}{2} - y \right)^2 = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} \left(\frac{\pi}{2} - y \right)^2 = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - y)} \left(\frac{\pi}{2} - y \right)^2.$$

Opět použijeme VoLSF. Položíme $f(x) = \frac{x^2}{\sin^2 x}$ a $g(y) = \frac{\pi}{2} - y$. Pak $\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(y) = 0$ a g je prostá. Dle VoLSF(P) tudíž dostáváme

$$\begin{aligned}
& \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - y)} \left(\frac{\pi}{2} - y \right)^2 = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(g(y)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\sin^2 x} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2}} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}} \stackrel{\text{ZL}}{=} \frac{1}{1 \cdot 1} = 1.
\end{aligned}$$

Příklad 3 (g) Spočítáme prvně limitu vnitřní funkce:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \frac{\sin x}{2x} \stackrel{\text{AL+0 krát omezená}}{=} 0.$$

Označme $f(y) = \log y$ a $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\sin x}{2x}$. Právě jsme spočítali, že $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Zároveň vidíme, že $g(x) \neq 0$ na $(1, \infty)$. Z VoLSF(P) dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \log y = -\infty.$$

Příklad 4 (a) Budeme chtít využít známých limit a VoLSF.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\arctan(\arcsin x)} \cdot \frac{\tan x}{\tan x} \cdot \frac{\arcsin x}{\arcsin x} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{\arcsin x}{\arctan(\arcsin x)} \cdot \frac{x}{\arcsin x} \stackrel{\text{VoAL}}{=} 1.$$

Poslední rovnost platí, protože:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \stackrel{\text{VOLSF (P)}}{=} 1$, kde $g(x) = \tan x$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ (ze spojitosti) a $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$ (známá limita) a platí podmínka (P).
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, víme z předchozích cvičení, neb se jedná o limitu odvozenou ze známé limity.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\arctan(\arcsin x)} \stackrel{\text{VOLSF (P)}}{=} 1$, kde $g(x) = \arcsin x$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ (ze spojitosti) a $f(y) = \frac{y}{\arctan y}$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$ (odvozené od známé limity) a platí podmínka (P).
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1$, víme z předchozích cvičení, neb se jedná o limitu odvozenou ze známé limity.

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 4 (b) Budeme chtít využít známých limit a VOLSF.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\arctan x)}{x^2} \cdot \frac{\arctan x}{\arctan x} \cdot \frac{\arctan x}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\arctan x)}{(\arctan x)^2} \cdot \frac{(\arctan x)^2}{x^2} \stackrel{\text{VOAL}}{=} \frac{1}{2}.$$

Poslední rovnost platí, protože:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\arctan x)}{(\arctan x)^2} \stackrel{\text{VOLSF (P)}}{=} \frac{1}{2}$, kde $g(x) = \arctan x$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ (ze spojitosti) a $f(y) = \frac{1 - \cos y}{y^2}$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = \frac{1}{2}$ (odvozeno od známé limity) a platí podmínka (P).
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctan x)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \cdot \frac{\arctan x}{x} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 1$, víme z předchozích cvičení, neb se jedná o limitu odvozenou ze známé limity.

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 4 (c)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{5}{2}} \arcsin(\sqrt{x^5 + 1} - \sqrt{x^5 - 1} \cdot \frac{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}}{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{5}{2}} \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}}{2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}}\right)}{\frac{2}{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}}} \cdot \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}} = \\ &\stackrel{\text{VOAL}}{=} 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^5}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^5}}} \stackrel{\text{VOAL+spoj.}}{=} \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

První VOAL rovnost platí, protože:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}}\right)}{\frac{2}{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}}} \stackrel{\text{VOLSF (P)}}{=} 1,$$

kde $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \stackrel{\text{VOAL+spoj.}}{=} 0$ a $f(y) = \frac{\arcsin y}{y}$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$ (známá limita) a platí podmínka (P). Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 4 (d) Budeme chtít využít známých limit a VOLSF.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (4x^2 - 9\pi^2) \frac{\cos x}{1 + \sin x} \cdot \frac{(x - \frac{3\pi}{2})^2}{(x - \frac{3\pi}{2})^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{4x^2 - 9\pi^2}{x - \frac{3\pi}{2}} \cdot \frac{\cos x}{x - \frac{3\pi}{2}} \cdot \frac{(x - \frac{3\pi}{2})^2}{1 + \sin x} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 24\pi.$$

Poslední rovnost platí, protože:

- $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{4x^2 - 9\pi^2}{x - \frac{3\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{(2x - 3\pi)(2x + 3\pi)}{x - \frac{3\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (2x + 3\pi) \cdot 2 = 12\pi$ (ze spojitosti).
- $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{3\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{2})}{x - \frac{3\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{3\pi}{2})}{x - \frac{3\pi}{2}} \stackrel{\text{VOLSF (P)}}{=} 1$, kde $g(x) = x - \frac{3\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} g(x) = 0$ (ze spojitosti) a $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$ (známá limita) a platí podmínka (P).
- $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{(x - \frac{3\pi}{2})^2}{1 + \sin x} = \lim_{y \rightarrow -\frac{3\pi}{2}} \frac{(-y - \frac{3\pi}{2})^2}{1 + \sin(-y)} = \lim_{y \rightarrow -\frac{3\pi}{2}} \frac{(y + \frac{3\pi}{2})^2}{1 - \sin(y)}$ dle VOLSF (P) ($x \rightarrow \frac{3\pi}{2} \iff -x \rightarrow -\frac{3\pi}{2}$).
- $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{(x - \frac{3\pi}{2})^2}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{3\pi}{2}} \frac{(x + \frac{3\pi}{2})^2}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{3\pi}{2}} \frac{(x + \frac{3\pi}{2})^2}{1 - \cos(x - \frac{\pi}{2})} = \lim_{x \rightarrow -\frac{3\pi}{2}} \frac{(x + \frac{3\pi}{2})^2}{1 - \cos(x + \frac{3\pi}{2})}$, kde první rovnost plyne z předchozího kroku. Dále platí $g(x) = x + \frac{3\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{3\pi}{2}} g(x) = 0$ (ze spojitosti) a $f(y) = \frac{y^2}{1 - \cos y}$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 2$ (odvozeno od známé limity). Tedy dle VOLSF (P) platí, že $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{(x - \frac{3\pi}{2})^2}{1 + \sin x} = 2$.

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 4 (e) Budeme chtít využít známých limit a VOLSF.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan((\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}})}{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}})}{\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}})}{\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 1. \end{aligned}$$

Poslední rovnost platí, protože:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}})}{\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}} \stackrel{\text{VOLSF(P)+spoj.}}{=} 1$, kde $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ a $f(y) = \frac{\arctan y}{y}$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$ (odvozeno od známé limity) a platí podmínka (P).
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{x^2}}} \stackrel{\text{VOAL} + \text{spoj.} + \text{omez. } \frac{2}{2}}{=} 1.$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 4 (f)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\log(\sqrt{1+x^2})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\log(\sqrt{1+x^2})} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} - 1} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{\cos(\sin x) - 1}{\sin^2 x} = \\
 &\stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}-1}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} - 1} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \left(- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{\sin^2 x} \right) = \\
 &= \frac{1}{1} \cdot 2 \cdot 1^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -1.
 \end{aligned}$$

Spočetli jsme

- první limitu pomocí VOLSF: $f(y) = \log(y)/(y-1)$, $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, předpoklad (P),
- druhou limitu použitím vzorce $a^2 - b^2$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}{1+x^2-1}$,
- třetí limitu jako známou limitu,
- čtvrtou limitu pomocí VOLSF: $f(y) = (1 - \cos y)/y^2$, $g(x) = \sin x$, předpoklad (P).

Příklad 4 (g)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1 + \sqrt{x})} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\sqrt{x}}{\log(1 + \sqrt{x})} \right)^2 \cdot \left(\frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} + \frac{e^{\frac{1}{2} \sin x} - 1}{\frac{1}{2} \sin x} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin x}{x} \right) = \\
 &\stackrel{\text{VoAL}}{=} \left(\frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}}} \right)^2 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} + \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{2} \sin x} - 1}{\frac{1}{2} \sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2} \sin x}{x} \right) = \\
 &= \left(\frac{1}{1} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \right) = 1.
 \end{aligned}$$

Spočetli jsme

- první limitu pomocí VOLSF: $f(y) = \log(1+y)/y$, $g(x) = \sqrt{x}$, předpoklad (P), a příkladu 7.3(i),
- druhou limitu pomocí VOLSF: $f(y) = (1 - \cos y)/y^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, předpoklad (P),
- třetí limitu pomocí VOLSF: $f(y) = (e^y - 1)/y$, $g(x) = (\sin x)/2$, předpoklad (P),
- čtvrtou limitu pomocí AL a známé limity.

Příklad 4 (h) Značíme $\exp(x) = e^x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(1 - \sqrt{\arcsin x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \exp \left(\log \left(1 - \sqrt{\arcsin x} \right) \frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}} \right)$$

Spočteme

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0+} \log \left(1 - \sqrt{\arcsin x} \right) \frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log \left(1 - \sqrt{\arcsin x} \right)}{-\sqrt{\arcsin x}} \cdot \frac{-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^2}{1-\cos x}} \\
 &\stackrel{\text{VoAL}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log \left(1 - \sqrt{\arcsin x} \right)}{-\sqrt{\arcsin x}} \right) \cdot \frac{-1}{\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{x}{\arcsin x}}} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[4]{\frac{1-\cos x}{x^2}}} = 1 \cdot \frac{-1}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1/2}} = -\sqrt[4]{2}
 \end{aligned}$$

Spočetli jsme

- první limitu pomocí VOLSF: $f(y) = \log(1+y)/y$, $g(x) = -\sqrt{\arcsin x}$, předpoklad (P), a příkladu 7.3(i); limitu $g(x)$ spočteme ze spojitosti,
- druhou limitu pomocí spojitosti odmocniny a VOLSF: $f(y) = (\sin y)/y$, $g(x) = \arcsin x$, předpoklad (P),
- třetí limitu pomocí spojitosti odmocniny a známé limity.

Díky spojitosti exponenciály se pak původní limita rovná $e^{-\sqrt[4]{2}}$.

Příklad 4 (i) Jako v předchozích případech stačí spočítat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \log \left(2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right) \frac{x^2 + 1}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right)}{2e^{\frac{4x}{x+1}} - 2} \cdot \frac{2(e^{\frac{4x}{x+1}} - 1)}{\frac{4x}{x+1}} \cdot \frac{4x}{x+1} \cdot \frac{x^2 + 1}{3x} \\ &\stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right)}{2e^{\frac{4x}{x+1}} - 2} \cdot 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{4x}{x+1}} - 1}{\frac{4x}{x+1}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x+1} \cdot \frac{x^2 + 1}{3x} \\ &= 1 \cdot (2 \cdot 1) \cdot \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Spočetli jsme

- první limitu pomocí VOLSF: $f(y) = \log(y)/(y-1)$, $g(x) = 2 \exp(\frac{4x}{x+1}) - 1$, předpoklad (P),
- druhou limitu pomocí VOLSF: $f(y) = (e^y - 1)/y$, $g(x) = (4x)/(x+1)$, předpoklad (P),
- třetí limitu standardně.

Díky spojitosti exponenciály se pak původní limita rovná $e^{8/3}$.

Příklad 4 (j)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \exp \left(\frac{1}{x} \log \left(\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right) \right)$$

Opět stačí spočítat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \log \left(\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \log \left(\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right) \frac{\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} - 1}{\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} - 1} = \\ &\stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log \left(\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right)}{\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} - 1 \right) \stackrel{(\text{V})}{=} \stackrel{(\text{A})}{=} \log \left(2\sqrt[3]{15} \right) \end{aligned}$$

Níže využíváme $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x-1} = 1$, kterou lze odvodit pomocí VOLSF a ZL $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$.

$$(\text{V}) : \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log \left(\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right)}{\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} - 1} = \left| g(x) = \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3}, \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = 1, f(y) = \frac{\log(y)}{y-1} \right| \stackrel{\text{VOLSF (P)}}{=} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log(y)}{y-1} = 1$$

$$\begin{aligned} (\text{A}) : \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} - 1 \right) &= \left| a^y = e^{y \log a} \right| \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \left(\frac{e^{x \log 4} - 1}{3} + \frac{e^{x \log 5} - 1}{3} + \frac{e^{x \log 6} - 1}{3} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \left(\frac{e^{x \log 4} - 1}{3x \log 4} x \log 4 + \frac{e^{x \log 5} - 1}{3x \log 5} x \log 5 + \frac{e^{x \log 6} - 1}{3x \log 6} x \log 6 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{e^{x \log 4} - 1}{3x \log 4} \log 4 + \frac{e^{x \log 5} - 1}{3x \log 5} \log 5 + \frac{e^{x \log 6} - 1}{3x \log 6} \log 6 \right) \stackrel{(\text{B})}{=} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{\log 4}{3} + \frac{\log 5}{3} + \frac{\log 6}{3} = \\ &= \frac{\log 120}{3} = \frac{\log(8 \cdot 15)}{3} = \log \left(2\sqrt[3]{15} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{A} : \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{x \log a} - 1}{3x \log a} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a} \left| g(x) = x \log a, \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = 0, f(y) = \frac{e^y - 1}{y} \right| = \\
& \stackrel{\text{VOLSF (P)}}{=} \frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \stackrel{\text{ZL}}{=} \frac{1}{3} \text{ pro } a \in \{4, 5, 6\}
\end{aligned}$$